数学①「数学Ⅰ・数学A」

訂正箇所	４０ページ　第２問　〔２〕　(3)
訂正内容	４０ページ全体を次のとおり変更する。

(3)　一般に，度数分布表

階級値	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	計
度数	f_1	f_2	$\cdots$	f_k	n

が与えられていて，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，分散 s^2 は

$$s^2=\frac{1}{n}\left\{(x_1-\overline{x})^2f_1+(x_2-\overline{x})^2f_2+\cdots+(x_k-\overline{x})^2f_k\right\}$$

で求めることができる。さらに s^2 は

$$s^2=\frac{1}{n}\left\{(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots+x_k{}^2f_k)-2\overline{x}\times\boxed{\text{ヌ}}+(\overline{x})^2\times\boxed{\text{ネ}}\right\}$$

と変形できるので

$$s^2=\frac{1}{n}(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots+x_k{}^2f_k)-\boxed{\text{ノ}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

である。

$\boxed{\text{ヌ}}$ ～ $\boxed{\text{ノ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ n	① n^2	② $\overline{x}$	③ $n\overline{x}$	④ $2n\overline{x}$
⑤ $n^2\overline{x}$	⑥ $(\overline{x})^2$	⑦ $n(\overline{x})^2$	⑧ $2n(\overline{x})^2$	⑨ $3n(\overline{x})^2$

(数学Ⅰ・数学A第２問は次ページに続く。)

数学Ⅰ・数学A

問　題	選　択　方　法
第1問	必　　答
第2問	必　　答
第3問	いずれか2問を選択し，解答しなさい。
第4問	
第5問	

 （注）この科目には，選択問題があります。（25ページ参照。）

第1問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕 a，b を定数とするとき，x についての不等式

$$|ax - b - 7| < 3 \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える。

(1) $a = -3$，$b = -2$ とする。① を満たす整数全体の集合を P とする。この集合 P を，要素を書き並べて表すと

$$P = \left\{ \boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウエ}} \right\}$$

となる。ただし，$\boxed{\text{アイ}}$，$\boxed{\text{ウエ}}$ の解答の順序は問わない。

(2) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする。

(i) $b = 1$ のとき，① を満たす整数は全部で $\boxed{\text{オ}}$ 個である。

(ii) ① を満たす整数が全部で $\left(\boxed{\text{オ}} + 1 \right)$ 個であるような正の整数 b のうち，最小のものは $\boxed{\text{カ}}$ である。

（数学Ⅰ・数学A第1問は28ページに続く。）

〔2〕 平面上に2点A，Bがあり，AB = 8である。直線AB上にない点Pをとり，△ABPをつくり，その外接円の半径を R とする。

太郎さんは，図1のように，コンピュータソフトを使って点Pをいろいろな位置にとった。

図1は，点Pをいろいろな位置にとったときの△ABPの外接円をかいたものである。

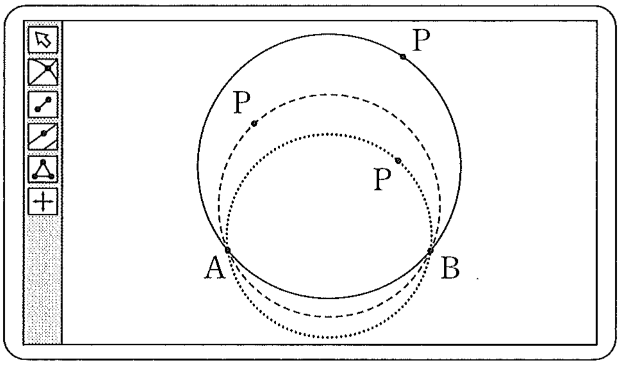


図 1

(1) 太郎さんは，点Pのとり方によって外接円の半径が異なることに気づき，次の**問題1**を考えることにした。

> **問題1** 点Pをいろいろな位置にとるとき，外接円の半径 R が最小となる△ABPはどのような三角形か。

正弦定理により，$2R = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\sin\angle\text{APB}}$ である。よって，R が最小となるのは $\angle\text{APB} = \boxed{\text{クケ}}^\circ$ の三角形である。このとき，$R = \boxed{\text{コ}}$ である。

(数学Ⅰ・数学A第1問は次ページに続く。)

(2) 太郎さんは，図2のように，**問題1**の点Pのとり方に条件を付けて，次の**問題2**を考えた。

> **問題2**　直線ABに平行な直線をℓとし，直線ℓ上で点Pをいろいろな位置にとる。このとき，外接円の半径Rが最小となる$\triangle$ABPはどのような三角形か。

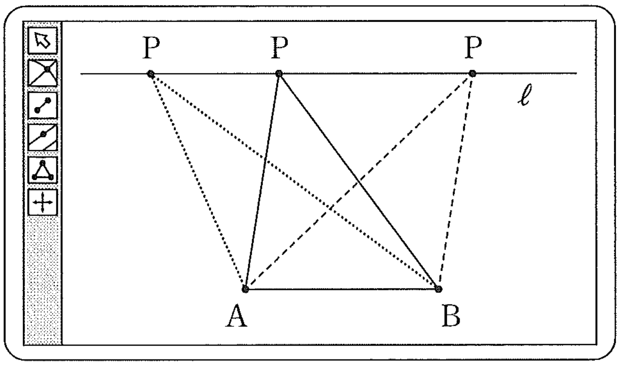


図　2

太郎さんは，この問題を解決するために，次の構想を立てた。

問題2の解決の構想

> **問題1**の考察から，線分ABを直径とする円をCとし，円Cに着目する。直線ℓは，その位置によって，円Cと共有点をもつ場合ともたない場合があるので，それぞれの場合に分けて考える。

直線ABと直線ℓとの距離をhとする。直線ℓが円Cと共有点をもつ場合は，$h \leqq$ $\boxed{\text{サ}}$ のときであり，共有点をもたない場合は，$h >$ $\boxed{\text{サ}}$ のときである。

（数学Ⅰ・数学A第1問は次ページに続く。）

(i)　$h \leqq$ $\boxed{サ}$ のとき

直線 ℓ が円Cと共有点をもつので，R が最小となる△ABPは，$h <$ $\boxed{サ}$ のとき $\boxed{シ}$ であり，$h =$ $\boxed{サ}$ のとき直角二等辺三角形である。

(ii)　$h >$ $\boxed{サ}$ のとき

線分ABの垂直二等分線を m とし，直線 m と直線 ℓ との交点を P_1 とする。直線 ℓ 上にあり点 P_1 とは異なる点を P_2 とするとき $\sin \angle AP_1B$ と $\sin \angle AP_2B$ の大小を考える。

$\triangle ABP_2$ の外接円と直線 m との共有点のうち，直線ABに関して点 P_2 と同じ側にある点を P_3 とすると，$\angle AP_3B$ $\boxed{ス}$ $\angle AP_2B$ である。

また，$\angle AP_3B < \angle AP_1B < 90°$ より $\sin \angle AP_3B$ $\boxed{セ}$ $\sin \angle AP_1B$ である。このとき

($\triangle ABP_1$ の外接円の半径) $\boxed{ソ}$ ($\triangle ABP_2$ の外接円の半径)

であり，R が最小となる△ABPは $\boxed{タ}$ である。

$\boxed{シ}$，$\boxed{タ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ 鈍角三角形	① 直角三角形	② 正三角形
③ 二等辺三角形	④ 直角二等辺三角形	

$\boxed{ス}$ ～ $\boxed{ソ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $<$	① $=$	② $>$

(数学Ⅰ・数学A第1問は次ページに続く。)

(3) **問題2**の考察を振り返って，$h = 8$ のとき，△ABP の外接円の半径 R が最小である場合について考える。このとき，$\sin \angle \mathrm{APB} = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ であり，$R = \boxed{\text{テ}}$ である。

第2問 (必答問題) (配点　30)

〔1〕 花子さんと太郎さんのクラスでは，文化祭でたこ焼き店を出店することになった。二人は1皿あたりの価格をいくらにするかを検討している。次の表は，過去の文化祭でのたこ焼き店の売り上げデータから，1皿あたりの価格と売り上げ数の関係をまとめたものである。

1皿あたりの価格(円)	200	250	300
売り上げ数(皿)	200	150	100

(1) まず，二人は，上の表から，1皿あたりの価格が50円上がると売り上げ数が50皿減ると考えて，売り上げ数が1皿あたりの価格の1次関数で表されると仮定した。このとき，1皿あたりの価格をx円とおくと，売り上げ数は

$$\boxed{\text{アイウ}} - x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表される。

(2) 次に，二人は，利益の求め方について考えた。

花子：利益は，売り上げ金額から必要な経費を引けば求められるよ。
太郎：売り上げ金額は，1皿あたりの価格と売り上げ数の積で求まるね。
花子：必要な経費は，たこ焼き用器具の賃貸料と材料費の合計だね。
　　材料費は，売り上げ数と1皿あたりの材料費の積になるね。

(数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。)

二人は，次の三つの条件のもとで，1皿あたりの価格 x を用いて利益を表すことにした。

（条件1） 1皿あたりの価格が x 円のときの売り上げ数として ① を用いる。

（条件2） 材料は，① により得られる売り上げ数に必要な分量だけ仕入れる。

（条件3） 1皿あたりの材料費は160円である。たこ焼き用器具の賃貸料は6000円である。材料費とたこ焼き用器具の賃貸料以外の経費はない。

利益を y 円とおく。y を x の式で表すと

$$y = -x^2 + \boxed{\text{エオカ}}\,x - \boxed{\text{キ}} \times 10000 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

である。

(3) 太郎さんは利益を最大にしたいと考えた。② を用いて考えると，利益が最大になるのは1皿あたりの価格が $\boxed{\text{クケコ}}$ 円のときであり，そのときの利益は $\boxed{\text{サシスセ}}$ 円である。

(4) 花子さんは，利益を7500円以上となるようにしつつ，できるだけ安い価格で提供したいと考えた。② を用いて考えると，利益が7500円以上となる1皿あたりの価格のうち，最も安い価格は $\boxed{\text{ソタチ}}$ 円となる。

（数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。）

〔2〕 総務省が実施している国勢調査では都道府県ごとの総人口が調べられており，その内訳として日本人人口と外国人人口が公表されている。また，外務省では旅券(パスポート)を取得した人数を都道府県ごとに公表している。加えて，文部科学省では都道府県ごとの小学校に在籍する児童数を公表している。

そこで，47 都道府県の，人口1万人あたりの外国人人口(以下，外国人数)，人口1万人あたりの小学校児童数(以下，小学生数)，また，日本人1万人あたりの旅券を取得した人数(以下，旅券取得者数)を，それぞれ計算した。

(数学Ⅰ・数学A第2問は 36 ページに続く。)

(1) 図1は，2010年における47都道府県の，旅券取得者数(横軸)と小学生数(縦軸)の関係を黒丸で，また，旅券取得者数(横軸)と外国人数(縦軸)の関係を白丸で表した散布図である。

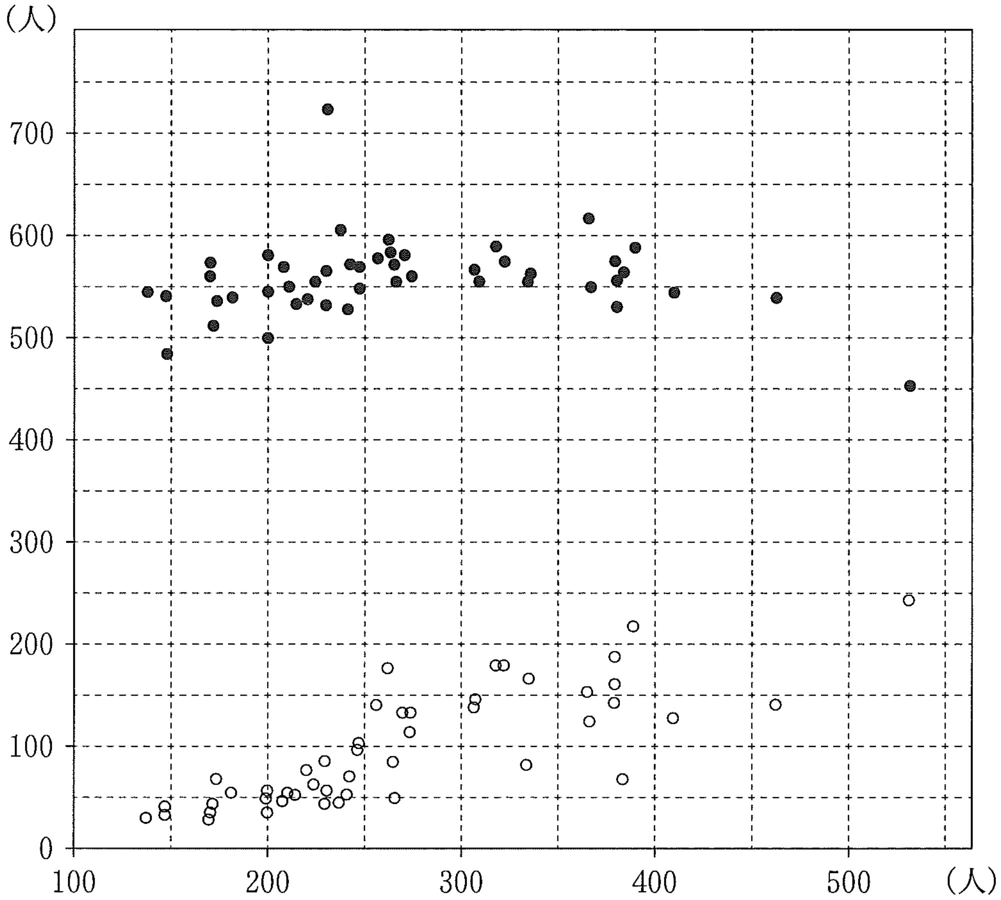


図1　2010年における，旅券取得者数と小学生数の散布図(黒丸)，旅券取得者数と外国人数の散布図(白丸)

(出典：外務省，文部科学省および総務省のWebページにより作成)

(数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。)

次の(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)は図1の散布図に関する記述である。

(Ⅰ)　小学生数の四分位範囲は，外国人数の四分位範囲より大きい。

(Ⅱ)　旅券取得者数の範囲は，外国人数の範囲より大きい。

(Ⅲ)　旅券取得者数と小学生数の相関係数は，旅券取得者数と外国人数の相関係数より大きい。

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{ツ}$ である。

$\boxed{ツ}$ の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(Ⅰ)	正	正	正	正	誤	誤	誤	誤
(Ⅱ)	正	正	誤	誤	正	正	誤	誤
(Ⅲ)	正	誤	正	誤	正	誤	正	誤

（数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。）

(2) 一般に，度数分布表

階級値	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_k	計
度数	f_1	f_2	f_3	f_4	$\cdots$	f_k	n

が与えられていて，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + x_4f_4 + \cdots + x_kf_k)$$

で求めることができる。さらに階級の幅が一定で，その値が h のときは

$$x_2 = x_1 + h,\ x_3 = x_1 + 2h,\ x_4 = x_1 + 3h,\ \cdots,\ x_k = x_1 + (k-1)h$$

に注意すると

$$\overline{x} = \boxed{\text{テ}}$$

と変形できる。

$\boxed{\text{テ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $\dfrac{x_1}{n}(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \cdots + f_k)$

① $\dfrac{h}{n}(f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + \cdots + kf_k)$

② $x_1 + \dfrac{h}{n}(f_2 + f_3 + f_4 + \cdots + f_k)$

③ $x_1 + \dfrac{h}{n}\{f_2 + 2f_3 + 3f_4 + \cdots + (k-1)f_k\}$

④ $\dfrac{1}{2}(f_1 + f_k)x_1 - \dfrac{1}{2}(f_1 + kf_k)$

（数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。）

図 2 は，2008 年における 47 都道府県の旅券取得者数のヒストグラムである。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

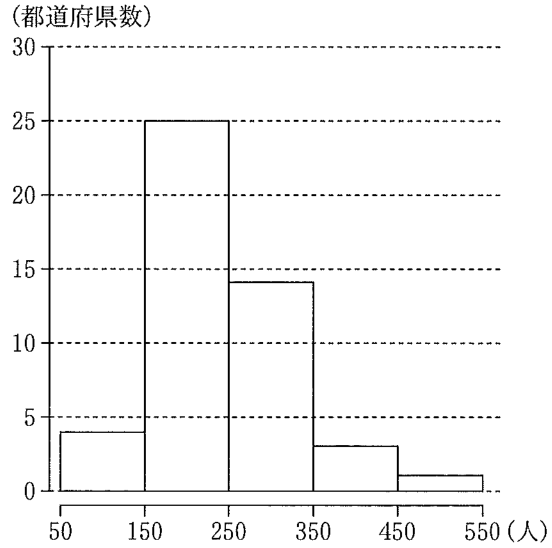


図 2　2008 年における旅券取得者数のヒストグラム

(出典：外務省の Web ページにより作成)

図 2 のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定する。このとき，平均値 $\bar{x}$ は小数第 1 位を四捨五入すると $\boxed{\text{トナニ}}$ である。

(数学Ⅰ・数学A第 2 問は次ページに続く。)

(3) 一般に，度数分布表

階級値	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	計
度数	f_1	f_2	$\cdots$	f_k	n

が与えられていて，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，分散 s^2 は

$$s^2 = \frac{1}{n}\left\{(x_1 - \overline{x})^2 f_1 + (x_2 - \overline{x})^2 f_2 + \cdots + (x_k - \overline{x})^2 f_k\right\}$$

で求めることができる。さらに s^2 は

$$s^2 = \frac{1}{n}\left\{(x_1^2 f_1 + x_2^2 f_2 + \cdots + x_k^2 f_k) - 2\overline{x} \times \boxed{\text{ヌ}} + (\overline{x})^2 \times \boxed{\text{ネ}}\right\}$$

と変形できるので

$$s^2 = \frac{1}{n}(x_1^2 f_1 + x_2^2 f_2 + \cdots + x_k^2 f_k) - \boxed{\text{ノ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。

$\boxed{\text{ヌ}}$ ～ $\boxed{\text{ノ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ n	① n^2	② $\overline{x}$	③ $n\overline{x}$	④ $2n\overline{x}$
⑤ $n^2\overline{x}$	⑥ $(\overline{x})^2$	⑦ $n(\overline{x})^2$	⑧ $2n(\overline{x})^2$	⑨ $3n(\overline{x})^2$

(数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。)

図3は，図2を再掲したヒストグラムである。

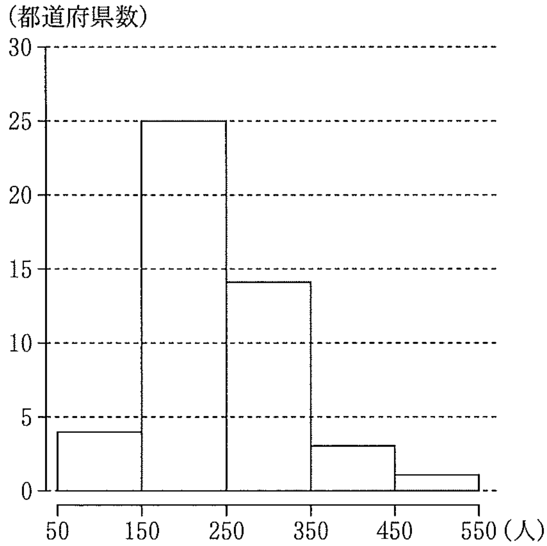


図3　2008年における旅券取得者数のヒストグラム

(出典：外務省のWebページにより作成)

図3のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，平均値 $\bar{x}$ は(2)で求めた $\boxed{\text{トナニ}}$ である。$\boxed{\text{トナニ}}$ の値と式①を用いると，分散 s^2 は $\boxed{\text{ハ}}$ である。

$\boxed{\text{ハ}}$ については，最も近いものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪ 3900	① 4900	② 5900	③ 6900
④ 7900	⑤ 8900	⑥ 9900	⑦ 10900

第３問　（選択問題）（配点　20）

二つの袋A，Bと一つの箱がある。Aの袋には赤球２個と白球１個が入っており，Bの袋には赤球３個と白球１個が入っている。また，箱には何も入っていない。

(1)　A，Bの袋から球をそれぞれ１個ずつ同時に取り出し，球の色を調べずに箱に入れる。

(i)　箱の中の２個の球のうち少なくとも１個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

(ii)　箱の中をよくかき混ぜてから球を１個取り出すとき，取り出した球が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ であり，取り出した球が赤球であったときに，それがBの袋に入っていたものである条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

（数学Ⅰ・数学A第３問は次ページに続く。）

(2) A，Bの袋から球をそれぞれ2個ずつ同時に取り出し，球の色を調べずに箱に入れる。

(i) 箱の中の4個の球のうち，ちょうど2個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。また，箱の中の4個の球のうち，ちょうど3個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(ii) 箱の中をよくかき混ぜてから球を2個同時に取り出すとき，どちらの球も赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。また，取り出した2個の球がどちらも赤球であったときに，それらのうちの1個のみがBの袋に入っていたものである条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

第4問 （選択問題）（配点　20）

正の整数 m に対して

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m,\ a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす整数 a，b，c，d の組がいくつあるかを考える。

(1)　$m=14$ のとき，① を満たす整数 a，b，c，d の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

$$(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}})$$

のただ一つである。

また，$m=28$ のとき，① を満たす整数 a，b，c，d の組の個数は $\boxed{\text{オ}}$ 個である。

(2)　a が奇数のとき，整数 n を用いて $a=2n+1$ と表すことができる。このとき，$n(n+1)$ は偶数であるから，次の条件がすべての奇数 a で成り立つような正の整数 h のうち，最大のものは $h=\boxed{\text{カ}}$ である。

条件：a^2-1 は h の倍数である。

よって，a が奇数のとき，a^2 を $\boxed{\text{カ}}$ で割ったときの余りは1である。

また，a が偶数のとき，a^2 を $\boxed{\text{カ}}$ で割ったときの余りは，0または4のいずれかである。

（数学Ⅰ・数学A第4問は次ページに続く。）

(3) (2)により，$a^2+b^2+c^2+d^2$ が $\boxed{\text{カ}}$ の倍数ならば，整数 a，b，c，d のうち，偶数であるものの個数は $\boxed{\text{キ}}$ 個である。

(4) (3)を用いることにより，m が $\boxed{\text{カ}}$ の倍数であるとき，①を満たす整数 a，b，c，d が求めやすくなる。

例えば，$m=224$ のとき，①を満たす整数 a，b，c，d の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

$$\left(\boxed{\text{クケ}},\ \boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サ}},\ \boxed{\text{シ}}\right)$$

のただ一つであることがわかる。

(5) 7の倍数で896の約数である正の整数 m のうち，①を満たす整数 a，b，c，d の組の個数が $\boxed{\text{オ}}$ 個であるものの個数は $\boxed{\text{ス}}$ 個であり，そのうち最大のものは $m=\boxed{\text{セソタ}}$ である。

第5問 (選択問題)(配点　20)

点Zを端点とする半直線ZXと半直線ZYがあり，$0° < \angle XZY < 90°$とする。また，$0° < \angle SZX < \angle XZY$かつ$0° < \angle SZY < \angle XZY$を満たす点Sをとる。点Sを通り，半直線ZXと半直線ZYの両方に接する円を作図したい。

円Oを，次の(Step 1)～(Step 5)の手順で作図する。

手順

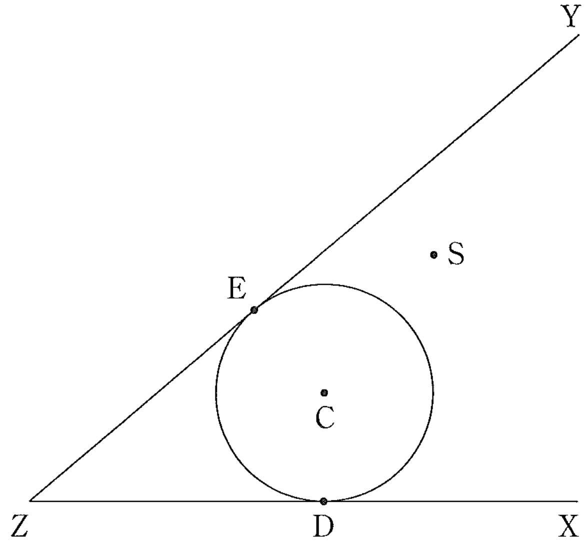
(Step 1)　$\angle XZY$の二等分線ℓ上に点Cをとり，下図のように半直線ZXと半直線ZYの両方に接する円Cを作図する。また，円Cと半直線ZXとの接点をD，半直線ZYとの接点をEとする。

(Step 2)　円Cと直線ZSとの交点の一つをGとする。

(Step 3)　半直線ZX上に点HをDG//HSを満たすようにとる。

(Step 4)　点Hを通り，半直線ZXに垂直な直線を引き，ℓとの交点をOとする。

(Step 5)　点Oを中心とする半径OHの円Oをかく。



参考図

(数学Ⅰ・数学A第5問は次ページに続く。)

(1) (Step 1)～(Step 5)の手順で作図した円Oが求める円であることは，次の構想に基づいて下のように説明できる。

構想

円Oが点Sを通り，半直線ZXと半直線ZYの両方に接する円であることを示すには，OH = $\boxed{\text{ア}}$ が成り立つことを示せばよい。

作図の手順より，△ZDGと△ZHSとの関係，および△ZDCと△ZHOとの関係に着目すると

DG : $\boxed{\text{イ}}$ = $\boxed{\text{ウ}}$: $\boxed{\text{エ}}$

DC : $\boxed{\text{オ}}$ = $\boxed{\text{ウ}}$: $\boxed{\text{エ}}$

であるから，DG : $\boxed{\text{イ}}$ = DC : $\boxed{\text{オ}}$ となる。

ここで，3点S，O，Hが一直線上にない場合は，∠CDG = ∠$\boxed{\text{カ}}$ であるので，△CDGと△$\boxed{\text{カ}}$ との関係に着目すると，CD = CGより OH = $\boxed{\text{ア}}$ であることがわかる。

なお，3点S，O，Hが一直線上にある場合は，DG = $\boxed{\text{キ}}$ DCとなり，DG : $\boxed{\text{イ}}$ = DC : $\boxed{\text{オ}}$ よりOH = $\boxed{\text{ア}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ DH	① HO	② HS	③ OD	④ OG
⑤ OS	⑥ ZD	⑦ ZH	⑧ ZO	⑨ ZS

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ OHD	① OHG	② OHS	③ ZDS
④ ZHG	⑤ ZHS	⑥ ZOS	⑦ ZCG

(数学Ⅰ・数学A第5問は次ページに続く。)

(2) 点Sを通り，半直線ZXと半直線ZYの両方に接する円は二つ作図できる。特に，点Sが$\angle XZY$の二等分線ℓ上にある場合を考える。半径が大きい方の円の中心をO_1とし，半径が小さい方の円の中心をO_2とする。また，円O_2と半直線ZYが接する点をIとする。円O_1と半直線ZYが接する点をJとし，円O_1と半直線ZXが接する点をKとする。

作図をした結果，円O_1の半径は5，円O_2の半径は3であったとする。このとき，$IJ = \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$である。さらに，円$O_1$と円$O_2$の接点Sにおける共通接線と半直線ZYとの交点をLとし，直線LKと円O_1との交点で点Kとは異なる点をMとすると

$$LM \cdot LK = \boxed{\text{サシ}}$$

である。

また，$ZI = \boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}$であるので，直線LKと直線$\ell$との交点をNとすると

$$\frac{LN}{NK} = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}, \quad SN = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。